Problemas de sucesiones y series de funciones.

1. *Hallar el límite puntual de las siguientes sucesiones de funciones. Decidir en cada caso si la convergencia es uniforme o solo puntual.*

1. $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$, *en* $[0,\infty)$ *y en* $x \in [0,a]$, $a > 0$.
2. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$, *en* $\mathbb{R}$, *en* $[0,\infty)$ *y en* $[a,\infty)$, $a > 0$.
3. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$, *en* $[0,\infty)$ *y en* $[a,\infty)$, $a > 0$.
4. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, *en* $[0,\infty)$, *en* $[0,1]$ *y en* $[0,a]$, $0 < a < 1$.
5. $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{1+nx}$, *en* $[0,\infty)$ *y en* $[0,a]$, $a > 0$.
6. $f_n(x) = \arctan nx$, *en* $\mathbb{R}$, *en* $[0,\infty)$ *y en* $[a,\infty)$, $a > 0$.
7. $f_n(x) = e^{-nx}$, *en* $\mathbb{R}$, *en* $[0,\infty)$ *y en* $[a,\infty)$.
8. $f_n(x) = xe^{-nx}$, *en* $\mathbb{R}$ *y en* $[0,\infty)$.
9. $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, *en* $\mathbb{R}$ *y en* $[0,\infty)$.
10. $f_n(x) = n^2x^2e^{-nx}$, *en* $\mathbb{R}$, *en* $[0,\infty)$ *y en* $[a,\infty)$, $a > 0$.

2. *Supongamos que* (f_n) *es una sucesión de funciones continuas en un intervalo* I *que converge uniformemente a una función* f *en* I. *Si* (x_n) *es una sucesión en* I *que converge a un punto* $c \in I$, *probar que* $\lim_n f_n(x_n) = f(c)$.

3. *Estudiar la convergencia uniforme de las siguientes series de funciones:*

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *en* $[-1,1]$ *y en* $[0,\infty)$.
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$ *en* $[0,1]$.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ *en todo* $\mathbb{R}$.

4. *Probar que*

$$\lim_n \int_1^2 e^{-nx^2}\,dx = 0.$$

5. *Sea*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \qquad x \in [0,1].$$

Probar que (f_n) *converge puntualmente a una función integrable* f *y no lo hace uniformemente, pero que, sin embargo,*

$$\int_0^1 f = \lim_n \int_0^1 f_n.$$

6. *Estudiar el dominio de definición, la continuidad y la derivabilidad de la función:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

7. *Estudiar el dominio de definición, la continuidad y la derivabilidad de las funciones siguientes:*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + x^2} \qquad\qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}$$

8. *Dada una serie convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, probar que la serie de Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x}$ *converge uniformemente en* $[0, \infty)$*. Utilizar esto para probar que*

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

9. *Probar que la función Zeta de Riemann, definida en* $(1, \infty)$ *por*

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

es derivable en todo su dominio. Probar que para todo $x > 1$ *la derivada en* x *se puede expresar en la forma*

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^x}.$$